Prof. Dr. Alfred Toth

Zu einer semiotischen Coalgebra

1. Es gibt natürlich, wie in den angestammten mathematischen Disziplinen, auch in der Semiotik mehrere Möglichkeiten, eine Algebra wie auch eine Coalgebra zu bilden (vgl. Rutten 1996; Gumm 2003). In der Semiotik wurden bisher Zeichenklassen und Realitätsthematiken auf Morphismen, Funktoren und natürliche Transformationen abgebildet (Bense 1981, S. 124 ff., Leopold 1990, Toth 1997, 2007a, S. 21 ff.). Obwohl im endlichen Bereich Algebren und Coalgebren "fast" dual sind, zeige ich im folgenden mit der Abbildung von natürlichen Transformationen auf als Mengen aufgefasste Zeichenklassen, Realitätsthematiken und ihre Transpositionen, dass auch in der Semiotik aus der nicht vollständigen Dualität bei Bialgebren neue Erkenntnisse gewonnen werden können.

2. Walther (1979, S. 79) erklärte die Bildung von Zeichenklassen als Vereinigungen der zwei Dyaden (M $\Rightarrow$ O) und (O $\Rightarrow$ I), also der Konkatenation der Bezeichnungs- und der Bedeutungsrelation der triadischen Zeichenrelation, die dadurch im Sinne Benses (1979, S. 67) als Relation über Relationen aufgefasst wird ((M $\Rightarrow$ O) $\Rightarrow$ I)). Trägt man also diesem Anspruch Rechnung, so wird man eine Zeichenklasse wie (3.1 2.1 1.3) nicht wie bisher als:

(3.1 2.1 1.3) $\equiv$ [$\alpha°\beta°$, $\alpha°$, $\beta\alpha$],

sondern wie folgt analysieren:

(3.1 2.1 1.3) = ((3.1 2.1), (2.1 1.3)) $\equiv$ [[$\beta°$, id1], [$\alpha°$, $\beta\alpha$]].

Vergleicht man die statische kategorietheoretische Analyse von Zeichenklassen wie etwa:

(3.1 2.1 1.3) $\equiv$ [$\alpha°\beta°$, $\alpha°$, $\beta\alpha$]
(3.2 2.2 1.2) $\equiv$ [$\beta°$, id2, α],

so erkennt keinen strukturellen Zusammenhang zwischen den beiden natürlichen Transformationen; es ist nicht einmal klar, ob es sich hier um Zeichenklassen, um Realitätsthematiken oder um was auch immer handelt, wohl aber, wenn man die in Toth (2008) eingeführte "dynamische" Analyse benutzt:

(3.1 2.1 1.3) $\equiv$ [[$\underline{\beta°}$, id1], [$\underline{\alpha°}$, $\beta\alpha$]]
(3.2 2.2 1.2) $\equiv$ [[$\underline{\beta°}$, id2], [$\underline{\alpha°}$, id2]].

Aus dem Vergleich der beiden Zeichenklassen erkennt man ein erstes allen 10 regulären Zeichenklassen gemeinsames Prinzip:

Kategorietheoretisches Triadizitätsprinzip für Zeichenklassen: Reguläre Zeichenklassen sind gemäss dem kategorietheoretischen Schema [[$\beta°$, X], [$\alpha°$, Y]] gebaut.

Dieses Prinzip bringt also die Peircesche pragmatische Maxime insofern zum Ausdruck, als reguläre Zeichenklassen gemäss degenerativer Semiotizität in ihrem Hauptwert konstruiert sind: (3.a 2.b 1.c).

Da Realitätsthematiken dual zu ihren Zeichenklassen definiert sind, muss dem Triadizitätsprinzip für Zeichenklassen dual ein Trichotomizitätsprinzip für Realitätsthematiken entsprechen:

Kategorietheoretisches Trichotomizitätsprinzip für Realitätsthematiken: Reguläre Realitätsthematiken sind gemäss dem kategorietheoretischen Schema [[Y°, α], [X°, β]] gebaut.

<u>Beweis</u>: Das allgemeine Schema für Zkln lautet: (a.b c.d e.f), die duale Realitätsthematik (f.e d.c b.a). Da duale Kategorien als α°, β° notiert werden, da identitive Kategorien selbstdual sind (d.h. (idx)° = idx, da für koponierte Morphismen (βα)° = α°β° und (α°β°)° = βα gilt und da ferner X°° = X ist, bekommen wir aus dem kategorietheoretischen Triadizitätsprinzip für Zkln: ([[β°, X], [α°, Y]])° = [[[Y°, α], [X°, β]].■

3. Wenn man sich daran erinnert, dass reguläre Zeichenklassen nach dem Inklusionsschema (3.a 2.b 1.c) mit a ≤ b ≤ c (a, b, c ∈ {.1, .2, .3}) gebaut sind, so erkennt man in den obigen zwei Zeichenklassen noch ein zweites Prinzip:

Kategorietheoretisches Inklusionsprinzip für Zeichenklassen: Reguläre Zeichenklassen sind gemäss dem kategorietheoretischen Schema [[β°, X], [α°, Y]] mit X ∈ {idx, α, βα, β} und Y ∈ {idx, α, βα} gebaut.

Das zugehörige duale Prinzip für Realitätsthematiken lautet:

Kategorietheoretisches Inklusionsprinzip für Realitätsthematiken: Reguläre Realitätsthematiken sind gemäss dem kategorietheoretischen Schema [[Y°, α], [X°, β]] mit Y° ∈ {idx, α°, α°β°} und X° ∈ {idx, α°, α°β°, β°} gebaut.

4. Geht man nun von der bereits gegebenen allgemeinen Form von Zeichenklassen:

Zkl = (a.b c.d e.f)

bzw. der dualen Realitätsthematik:

Rth = (f.e d.c b.a)

aus, so erkennt man, dass das Zehnersystem der regulären Zeichenklassen **strukturell unvollständig** ist, denn das vollständige System der Permutationen der Zkl (a.b c.d e.f) lautet:

(a.b c.d e.f) × (f.e d.c b.a)
(a.b e.f c.d) × (d.c f.e b.a)

(c.d a.b e.f) × (f.e b.a d.c)
(c.d e.f a.b) × (b.a f.e d.c)
(e.f a.b c.d) × (d.c b.a f.e)
(e.f c.d a.b) × (b.a d.c f.e),

d.h. jede Zeichenklasse und jede Realitätsthematik besitzt, sie selbst eingeschlossen, 6 Transpositionen. Wir wollen nun nach den Triadizitäts- und Inklusionsprinzipen auch die von der Zeichenklasse abweichenden 5 Transpositionsprinzipien und ihre dualen Gegenstücke formulieren. Um diese Transpositionsprinzipien leichter nachvollziehbar zu machen, gehen wir wiederum von der Zkl (3.1 2.1 1.3) aus und numerieren ihre 5 Transpositionen:

1. (3.1 1.3 2.1) ≡ [[α°β°, βα], [α, α°β°]]
2. (1.3 2.1 3.1) ≡ [[α, α°β°], [β, id1]]
3. (1.3 3.1 2.1) ≡ [[βα, α°β°], [β°, id1]]
4. (1.2 3.1 1.3) ≡ [[βα, α°], [α°β°, βα]]
5. (1.2 1.3 3.1) ≡ [[id1, β], [βα, α°β°]]

In abstrakter Form notiert, entsprechen den total 6 Zeichenklassen-Transpositionen also folgende kategorietheoretischen Schemata:

1. [[β°, X], [α°, Y°]]
2. [[Y, Y°], [α, Y]]
3. [[α, Y], [β, X]]
4. [[Y°, Y], [β°, X]]
5. [[Y°, α°], [Y, Y°]]
6. [[X, β], [Y°, Y]]

und den total 6 Transpositionen der dualen Realitätsthematiken:

7. [[Y, α], [X°, β]]
8. [[Y°, α°], [Y, Y°]]
9. [[X°, β°], [Y°, α°]]
10. [[X°, β], [Y°, Y]]
11. [[Y, Y°], [α, Y]]
12. [[Y°, Y], [β°, X°]]

Wenn wir nun vom allgemeinen Schema für Zeichenklassen [[β°, X], [α°, Y]] ausgehen, worin also neben den durch das Triadizitätsprinzip vorgegebenen Konstanten β° und α° die Variablen X und Y auftreten, erkennen wir, dass ein kategorietheoretisches Schema mit 2 Plätzen und 2 Variablen in Kombination mit zwei Konstanten und der Möglichkeit, dass jede Variable und jede Konstante durch ihre duale Kategorie ersetzt werden kann, 15mal permutiert werden kann. Wir geben zusätzlich zur Illustration die Permutationen der Zeichenklasse (3.1 2.1 1.3):

1 $[[\alpha, Y], [\beta, X]] \quad \to ((1.3\ 2.1), (2.1\ 3.1))$
2 $[[\alpha°, Y], [\beta, X]] \quad \to ((2.3\ 1.1), (2.1\ 3.1))$
3 $[[\alpha, Y°], [\beta, X]] \quad \to ((1.1\ 2.3), (2.1\ 3.1))$
4 $[[\alpha, Y], [\beta°, X]] \quad \to ((1.3\ 2.1), (3.1\ 2.1))$
5 $[[\alpha, Y], [\beta, X°]] \quad \to ((1.3\ 2.1), (2.1\ 3.1))$
6 $[[\alpha°, Y°], [\beta, X]] \quad \to ((2.1\ 1.3), (2.1\ 3.1))$
7 $[[\alpha, Y°], [\beta°, X]] \quad \to ((2.1\ 1.3), (3.1\ 2.1))$
8 $[[\alpha, Y], [\beta°, X°]] \quad \to ((1.3\ 2.1), (3.1\ 2.1))$
9 $[[\alpha°, Y], [\beta°, X]] \quad \to ((2.3\ 1.1), (3.1\ 2.1))$
10 $[[\alpha, Y°], [\beta, X°]] \quad \to ((1.1\ 2.3), (2.1\ 3.1))$
11 $[[\alpha°, Y], [\beta, X°]] \quad \to ((2.3\ 1.1), (2.1\ 3.1))$
12 $[[\alpha°, Y°], [\beta°, X]] \quad \to ((2.1\ 1.3), (3.1\ 2.1))$
13 $[[\alpha, Y°], [\beta°, X°]] \quad \to ((1.1\ 2.3), (3.1\ 2.1))$
14 $[[\alpha°, Y], [\beta°, X°]] \quad \to ((2.3\ 1.1), (3.1\ 2.1))$
15 $[[\alpha°, Y°], [\beta°, X°]] \quad \to ((2.1\ 1.3), (3.1\ 2.1))$,

mit anderen Worten: Auch die total 12 Permutationen des allgemeinen Schemas der Zeichenklassen (a.b c.d e.f) sind also noch **strukturell unvollständig**. Schon die nicht-transponierte kategorietheoretische Basis einer Zeichenklasse $[[\beta°, X], [\alpha°, Y]]$ mit 2 Konstanten und 2 festen Plätzen, die das Triadizitätsprinzip aufrechterhalten, führt also nicht nur zu den klassischen 10, sondern zu 15 Zeichenklassen-Schemata.

5. Wenn man die 15 kategorietheoretischen Permutationen anschaut, erkennt man leicht, dass Fälle wie

$[[\beta°, X], [\alpha°, Y]] \to ((3.1\ 2.1), (2.1\ 1.3)) \to (3.1\ 2.1\ 1.3)$

zu regulären Zeichenklassen und Fälle wie

$[[\alpha, Y], [\beta, X]] \equiv [[\alpha, Y], [\beta, X°]] \to ((1.3\ 2.1), (2.1\ 3.1)) \to (1.3\ 2.1\ 3.1)$

zu Transpositionen von Zeichenklassen führen, nicht aber die überwiegende Anzahl von Fällen, etwa:

$[[\alpha, Y°], [\beta, X°]] \to ((1.1\ 2.3), (2.1\ 3.1))$,
$[[\alpha°, Y], [\beta°, X°]] \to ((2.3\ 1.1), (3.1\ 2.1))$

wo sich also die beiden numerischen Dyaden nicht im Objektbezug schneiden, weshalb die beiden Dyaden nicht zu Triaden vereinigt werden können.

Damit stellt sich jedoch die Frage, ob man aus den kategorietheoretischen Schemata Zeichenklassen konstruieren kann. Unter Zeichenklassen kann man zunächst natürliche Transformationen verstehen, die eine Partition eines kategorietheoretischen Schemas (a.b c.d e.f) in (a.b c.d) (c.d e.f) bzw. umgekehrt zulassen. Reguläre Zeichenklassen sind ferner solche, die ausserdem die Inklusionsbedingung erfüllen:

(3.1 2.1 1.1) ≡ ((3.1 2.1), (2.1 1.1)) ≡ [[β°, id1], [α°, id1]] ≡ (3.2 1.1) (2.1 1.1)
(3.1 2.1 1.2) ≡ ((3.1 2.1), (2.1 1.2)) ≡ [[β°, id1], [α°, α]] ≡ (3.2 1.1) (2.1 1.2)
(3.1 2.1 1.3) ≡ ((3.1 2.1), (2.1 1.3)) ≡ [[β°, id1], [α°, βα]]
(3.1 2.2 1.2) ≡ ((3.1 2.2), (2.2 1.2)) ≡ [[β°, α], [α°, id2]]
(3.1 2.2 1.3) ≡ ((3.1 2.2), (2.2 1.3)) ≡ [[β°, α], [α°, β]]
(3.1 2.3 1.3) ≡ ((3.1 2.3), (2.3 1.3)) ≡ [[β°, βα], [α°, id3]]
(3.2 2.2 1.2) ≡ ((3.2 2.2), (2.2 1.2)) ≡ [[β°, id2], [α°, id2]]
(3.2 2.2 1.3) ≡ ((3.2 2.2), (2.2 1.3)) ≡ [[β°, id2], [α°, β]]
(3.2 2.3 1.3) ≡ ((3.2 2.3), (2.3 1.3)) ≡ [[β°, β], [α°, id3]]
(3.3 2.3 1.3) ≡ ((3.3 2.3), (2.3 1.3)) ≡ [[β°, id3], [α°, id3]]

Unter den nicht-regulären Zeichenklassen, also solchen Zeichenklassen, welche nur die Triadizitätsbedingung erfüllen, befindet sich die Genuine Kategorienklasse, welche die Hauptdiagonale der kleinen semiotischen Matrix bildet:

*(3.3 2.2 1.1) ≡ ((3.3 2.2), (2.2 1.1)) ≡ [[β°, β°], [α°, α°]]

Weitere Beispiele sind:

*(3.2 2.1 1.1) ≡ ((3.2 2.1), (2.1 1.1)) ≡ [[β°, α°], [α°, id1]]
*(3.1 2.2 1.1) ≡ ((3.1 2.2), (2.2 1.1)) ≡ [[β°, α], [α°, α°]]
*(3.2 2.1 1.3) ≡ ((3.2 2.1), (2.1 1.3)) ≡ [[β°, α°], [α°, βα]]
*(3.3 2.1 1.3) ≡ ((3.3 2.1), (2.1 1.3)) ≡ [[β°, α°β°], [α°, βα]]

Wenn wir umgekehrt etwa von den beiden folgenden natürlichen Transformationen ausgehen:

[[β°, α°β°], [α°, id3]] ≡ *((3.3 2.1), (2.3 1.3))
[[β°, id2], [α°, βα]] ≡ *((3.2 2.2), (2.1 1.3)),

dann haben die beiden numerischen Dyaden keinen gemeinsamen Objektbezug (und überhaupt eine leere Schnittmenge), so dass sie nicht zu einer Triade reduziert werden können. Mit anderen Worten: Es ist unmöglich, auf der Basis der kategorietheoretischen Schemata den ganzen Strukturreichtum derjenigen Zeichenklassen zu konstruieren, welche das Triadizitätsprinzip erfüllen; vielmehr müssen wir sie numerisch durch Kombination der Subzeichen-Dyaden ermitteln. Da das Triadizitätsprinzip besagt, dass die Hauptwerte der drei Zahlenpaare einer triadischen Relation durch die Konstanten 3.a 2.b 1.c in dieser Reihenfolge belegt werden müssen, ergeben sich 3^3 = 27 triadische Zeichenklassen:

<u>3.1 2.1 1.1</u>	3.2 2.1 1.1	3.3 2.1 1.1
<u>3.1 2.1 1.2</u>	3.2 2.1 1.2	3.3 2.1 1.2
<u>3.1 2.1 1.3</u>	3.2 2.1 1.3	3.3 2.1 1.3

3.1 2.2 1.1	3.2 2.2 1.1	**3.3 2.2 1.1**
3.1 2.2 1.2	3.2 2.2 1.2	3.3 2.2 1.2
3.1 2.2 1.3	3.2 2.2 1.3	3.3 2.2 1.3
3.1 2.3 1.1	3.2 2.3 1.1	3.3 2.3 1.1
3.1 2.3 1.2	3.2 2.3 1.2	3.3 2.3 1.2
3.1 2.3 1.3	3.2 2.3 1.3	3.3 2.3 1.3

In der obigen Darstellung wurden die regulären Zeichenklassen, welche das Inklusionsprinzip befolgen, durch Unterstreichung und die in der kleinen semiotischen Matrix natürlich auftretende irreguläre Genuine Kategorienklasse fett hervorgehoben. Nehmen wir also eine beliebige nicht-reguläre Zeichenklasse aus der obigen Tabelle und notieren wir sie als natürliche Transformation:

$$(3.2\ 2.3\ 1.1) = ((3.2\ 2.3)\ (2.3\ 1.1)) \equiv [[\beta°, \beta], [\alpha°, \alpha°\beta°]],$$

dann sehen wir, dass die obige Tabelle uns genau alle jene Zeichenklassen liefert, welche das Triadizitätsprinzip befolgen. Eine Teilmenge dieser 27 Zeichenklassen bilden nun die 10 Zeichenklassen, welche zusätzlich das Inklusionsprinzip befolgen. Diese 10 Zeichenklassen sind aber vom Standpunkt des ganzen Strukturreichtums, wie er sowohl durch die natürlichen Transformationen als auch durch die numerischen Permutationen zum Ausdruck kommt, wiederum **semiotisch unvollständig**. Es gibt ferner keinen mathematischen Grund, weshalb Zeichenklassen Halbordnungen vom Typ (3.a 2.b 1.c) mit $a \leq b \leq c$ ($a, b, c \in \{.1, .2, .3\}$ sein sollen, denn die Genuine Kategorienklasse selbst deutet ja schon die Möglichkeit anderer Typen semiotischer Ordnungen an, und solche treten bereits in der klassischen, auf dem Zehnersystem basierenden Semiotik zu Hauf auf (vgl. Toth 1996; 2007a, S. 64 ff.).

6. Legt man also der mathematischen Semiotik die 27 Zeichenklassen zu Grunde, dann tritt wiederum jede Zeichenklasse in 6 Transpositionen auf, und alle diese 162 Zeichenklassen können dualisiert werden, wodurch wir also ein semiotisches System von 324 Zeichenklassen und Realitätsthematiken statt wie bisher 20 bekommen. Nun kann ferner jede dieser 324 Repräsentationsklassen in allen 4 semiotischen Quadranten auftreten (vgl. Toth 2007a, S. 52 ff.; 2007b, S. 82 ff.), was die Möglichkeiten semiotischer Repräsentation auf 1296 Repräsentationsklassen erhöht.

Wegen der grossen Rolle, welche semiotischen Symmetrien im Zusammenhang mit Eigenrealität seit Bense (1992) allgemein zuerkannt werden, empfiehlt es sich, die Vorteile eines 1296 statt 20 Repräsentationsklassen umfassenden semiotischen Systems anhand von Symmetrien aufzuzeigen. Wir wollen uns hier jedoch zunächst auf die 324 Zeichenklassen beschränken und wieder "coalgebraisch" vorgehen und zunächst nicht die numerischen Zeichenklassen, sondern deren natürliche Transformationen auf symmetrische Strukturen und ihren Zusammenhang mit Eigenrealität untersuchen.

Wenn wir die kategorietheoretische Struktur der einzigen eigenrealen Zeichenklasse des Zehnersystems anschauen:

$(3.1\ 2.2\ 1.3) = ((3.1\ 2.2), (2.2\ 1.3)) \equiv [[\beta°, \alpha], [\alpha°, \beta]]$,

bekommen wir durch Verallgemeinerung der Kategorien zunächst

$[[X°, Y], [Y°, X]]$

und durch Aufhebung kategorieller Verschiedenheit das Schema

$[[X°, X], [X°, X]]$,

welches nun zwar von den Dyaden-Paaren ((1.2 2.1), (2.1 1.2)), ((2.3 3.2), (3.2 2.3)), ((1.3 3.1), (3.1 1.3)) erfüllt wird, die jedoch in numerischer Notation keine Binnensymmetrie zeigen und somit die Hauptvoraussetzung für Eigenrealität verletzen. Daraus folgt, dass das Schema [[X°, X], [X°, X]] offenbar nur dann als kategorietheoretische Repräsentation von Eigenrealität gilt, wenn zwei Dyaden-Paare zu Triaden reduzierbar sind. Nun sind aber die obigen Dyaden-Paare nur zu Dyaden, nicht jedoch zu Triaden reduzierbar.

Um herauszufinden, welche kategoriellen Schemata binnensymmetrisch sind, gehen wir also vom obigen Schema [[X°, X], [X°, X]] aus und untersuchen alle Permutationen, die sich aus der Kombination von inversen und nicht-inversen Morphismen ergeben. Als Beispiel diene X = (2.1):

1. [[X, X], [X, X]] → ((2.1 2.1), (2.1 2.1))
2. [[X°, X], [X, X]] → ((1.2 2.1), (2.1 2.1))
3. [[X, X°], [X, X]] → ((2.1 1.2), (2.1 2.1))
4. [[X, X], [X°, X]] → ((2.1 2.1), (1.2 2.1))
5. [[X, X], [X, X°]] → ((2.1 2.1), (2.1 1.2))
6. [[X°, X°], [X, X]] → ((1.2 1.2), (2.1 2.1))
7. [[X, X°], [X°, X]] → ((2.1 1.2), (1.2 2.1))
8. [[X, X], [X°, X°]] → ((2.1 2.1), (1.2 1.2))
9. [[X°, X], [X°, X]] → ((1.2 2.1), (1.2 2.1))
10. [[X°, X], [X, X°]] → ((1.2 2.1), (2.1 1.2))
11. [[X, X°], [X, X°]] → ((2.1 1.2), (2.1 1.2))
12. [[X°, X°], [X°, X]] → ((1.2 1.2), (1.2 2.1))
13. [[X, X°], [X°, X°]] → ((2.1 1.2), (1.2 1.2))
14. [[X°, X], [X°, X°]] → ((1.2 2.1), (1.2 1.2))
15. [[X, X°], [X°, X°]] → ((2.1 1.2), (1.2 1.2))
16. [[X°, X°], [X°, X°]] → (1.2 1.2), (1.2 1.2))

Vollständig binnensymmetrisch und daher eigenreal sind folgende 4 Dyaden-Paare:

6. [[X°, X°], [X, X]] → ((1.2 1.2), (2.1 2.1))
8. [[X, X], [X°, X°]] → ((2.1 2.1), (1.2 1.2))

9. $[[X^\circ, X], [X^\circ, X]] \rightarrow ((1.2\ 2.1), (1.2\ 2.1))$
11. $[[X, X^\circ], [X, X^\circ]] \rightarrow ((2.1\ 1.2), (2.1\ 1.2))$

Partiell binnensymmetrisch sind:

3. $[[X, X^\circ], [X, X]] \rightarrow ((2.1\ 1.2), (2.1\ 2.1))$
4. $[[X, X], [X^\circ, X]] \rightarrow ((2.1\ 2.1), (1.2\ 2.1))$
14. $[[X^\circ, X], [X^\circ, X^\circ]] \rightarrow ((1.2\ 2.1), (1.2\ 1.2))$

Während vollständig und partiell binnensymmetrische Dyaden-Paare nicht zu einfachen Dyaden reduziert werden können, können die folgenden "schwach symmetrischen" (nicht binnensymmetrischen) Dyaden-Paare vereinfacht werden. Die Reduktion ihrer entsprechenden Graphen verdankt sich deshalb gerade der fehlenden Binnensymmetrie:

1. $[[X, X], [X, X]] \rightarrow ((2.1\ 2.1), (2.1\ 2.1))$
2. $[[X^\circ, X], [X, X]] \rightarrow ((1.2\ 2.1), (2.1\ 2.1))$
5. $[[X, X], [X, X^\circ]] \rightarrow ((2.1\ 2.1), (2.1\ 1.2))$
7. $[[X, X^\circ], [X^\circ, X]] \rightarrow ((2.1\ 1.2), (1.2\ 2.1))$
10. $[[X^\circ, X], [X, X^\circ]] \rightarrow ((1.2\ 2.1), (2.1\ 1.2))$
12. $[[X^\circ, X^\circ], [X^\circ, X]] \rightarrow ((1.2\ 1.2), (1.2\ 2.1))$
13. $[[X, X^\circ], [X^\circ, X^\circ]] \rightarrow ((2.1\ 1.2), (1.2\ 1.2))$
15. $[[X, X^\circ], [X^\circ, X^\circ]] \rightarrow ((2.1\ 1.2), (1.2\ 1.2))$
16. $[[X^\circ, X^\circ], [X^\circ, X^\circ]] \rightarrow (1.2\ 1.2), (1.2\ 1.2))$

Es ist also gerade die Binnensymmetrie, welche bei der im semiotischen Zehnersystem einzigen eigenrealen Zeichenklasse zur Dualinvarianz führt:

$(3.1\ 2.2\ 1.3) \times (3.1\ 2.2\ 1.3)$
$((3.1\ 2.2), (2.2\ 1.3)) \times ((3.1\ 2.2), (2.2\ 1.3))$
$[[\beta^\circ, \alpha], [\alpha^\circ, \beta]] \times [[\beta^\circ, \alpha], [\alpha^\circ, \beta]]$

Nun enthält aber die Zeichenklasse (3.1 2.2 1.3) im Gegensatz zu den eigenrealen Dyaden-Paaren noch das selbstduale Subzeichen (2.2) bzw. den identitiven Morphismus (id2). Zeichenklassen, die ausschliesslich aus selbstdualen Subzeichen gebaut sind, erfüllen daher trivialerweise alle obigen Symmetriebedingungen. Die intuitive Erkenntnis dieses Sachverhaltes brachte nun Bense (1992, S. 40) dazu, die Genuine Kategorienklasse als Ausdruck von "schwächerer Eigenrealität" zu bezeichnen:

$(3.3\ 2.2\ 1.1) \times (1.1\ 2.2\ 3.3) \times (3.3\ 2.2\ 1.1)$
$((3.3\ 2.2), (2.2\ 1.1)) \times ((1.1\ 2.2), (2.2\ 3.3)) \times ((3.3\ 2.2), (2.2\ 1.1))$
$[[\beta^\circ, \beta^\circ], [\alpha^\circ, \alpha^\circ]] \times [[\alpha, \alpha], [\beta, \beta]] \times [[\beta^\circ, \beta^\circ], [\alpha^\circ, \alpha^\circ]]$

Wegen fehlender Binnensymmetrie kommt bei der Genuinen Kategorienklasse die Eigenrealität also erst im vollständigen Repräsentationssystem, d.h. im Verhältnis von Zeichenklasse und Realitätsthematik zum Ausdruck, während dieses Verhältnis bei der eigenrealen Zeichenklasse nicht nur im vollständigen Repräsentationssystem, sondern bereits in der Zeichenklasse und in der Realitätsthematik qua Binnensymmetrie vorhanden ist. Wir wollen deshalb abschliessend noch die Permutationen von Zeichenklassen untersuchen, die nicht nur aus Morphismen und ihren Inversen konstruiert sind, sondern mindestens einen identitiven Morphismus enthalten:

1. [[idx, X], [idx, X]] → ((2.2 2.1), (2.2, 2.1))
2. [[X, idx], [X, idx]] → ((2.1 2.2), (2.1 2.2))
3. [[X, idx], [idx, X]] → ((2.1 2.2), (2.2 2.1))
4. [[idx, X], [X, idx]] → ((2.2 2.1), (2.1 2.2))
5. [[idx, X°], [idx, X]] → ((2.2 1.2), (2.2 2.1))
6. [[X°, idx], [X, idx]] → ((1.2 2.2), (2.1 2.2))
7. [[X°, idx], [idx, X]] → ((1.2 2.2), (2.2 2.1))
8. [[idx, X°], [X, idx]] → ((2.2 1.2), (2.1 2.2))
9. [[idx, X], [idx, X°]] → ((2.2 2.1), (2.2 1.2))
10. [[X, idx], [X°, idx]] → ((2.1 2.2), (1.2 2.2))
11. [[X, idx], [idx, X°]] → ((2.1 2.2), (2.2 1.2))
12. [[idx, X], [X°, idx]] → ((2.2 2.1), (1.2 2.2))
13. [[idx, X°], [idx, X°]] → ((2.2 1.2), (2.2 1.2))
14. [[X°, idx], [X°, idx]] → ((1.2 2.2), (1.2 2.2))
15. [[X°, idx], [idx, X°]] → ((1.2 2.2), (2.2 1.2))
16. [[idx, X°], [X°, idx]] → ((2.2 1.2), (1.2 2.2))

Binnensymmetrisch:

7. [[X°, idx], [idx, X]] → ((1.2 2.2), (2.2 2.1))
8. [[idx, X°], [X, idx]] → ((2.2 1.2), (2.1 2.2))
11. [[X, idx], [idx, X°]] → ((2.1 2.2), (2.2 1.2))
12. [[idx, X], [X°, idx]] → ((2.2 2.1), (1.2 2.2))
16. [[idx, X°], [X°, idx]] → ((2.2 1.2), (1.2 2.2))

Partiell binnensymmetrisch:

3. [[X, idx], [idx, X]] → ((2.1 2.2), (2.2 2.1))
15. [[X°, idx], [idx, X°]] → ((1.2 2.2), (2.2 1.2))

Nicht binnensymmetrisch:

1. [[idx, X], [idx, X]] → ((2.2 2.1), (2.2, 2.1))
2. [[X, idx], [X, idx]] → ((2.1 2.2), (2.1 2.2))
4. [[idx, X], [X, idx]] → ((2.2 2.1), (2.1 2.2))
5. [[idx, X°], [idx, X]] → ((2.2 1.2), (2.2 2.1))
6. [[X°, idx], [X, idx]] → ((1.2 2.2), (2.1 2.2))
9. [[idx, X], [idx, X°]] → ((2.2 2.1), (2.2 1.2))

10. [[X, idx], [X°, idx]] → ((2.1 2.2), (1.2 2.2))
13. [[idx, X°], [idx, X°]] → ((2.2 1.2), (2.2 1.2))
14. [[X°, idx], [X°, idx]] → ((1.2 2.2), (1.2 2.2))

Auch hier nimmt also die Genuine Kategorienklasse insofern eine Sonderstellung ein, denn sie weist in ihrer kategoriellen Struktur

(3.3 2.2 1.1) [[$\underline{\beta°}$, β°], [$\underline{\alpha°}$, α°]]

die "iterierte Triadizitätsbedingung" ein, was sich somit als Bedingung für Benses "schwächere Eigenrealität" erweist.

Literatur

Rutten, Jan, Universal coalgebra: a theory of systems. 1996. http://citeseer.ist.psu.edu/cache/papers/cs/14973/http:zSzzSzwww.cwi.nlzSzftpzSzCWIreportszSzAPzSzCS-R9652.pdf/rutten96universal.pdf

Gumm, H. Peter, Universelle Coalgebra. In: Ihringer, Thomas, Universelle Algebra, Berlin 2003; Digitalisat: http://fldit-www.cs.uni-dortmund.de/~peter/GummCoalg.pdf

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Bense, Max, Axiomatik und Semiotik. Baden-Baden 1981

Bense, Max, Die Eigenrealität der Zeichen. Baden-Baden 1992

Leopold, Cornelie, Kategorietheoretische Konzeption der Semiotik. In: Semiosis 57/58, 1990, S. 93-100

Toth, Alfred, Grundriss einer ordnungstheoretischen Semiotik. In: European Journal for Semiotic Studies 8, 1996, S. 503-526

Toth, Alfred, Entwurf einer Semiotisch-Relationalen Grammatik. Tübingen 1997

Toth, Alfred, Grundlegung einer mathematischen Semiotik. Klagenfurt 2007 (2007a)

Toth, Alfred, Zwischen den Kontexturen. Klagenfurt 2007 (2007a)

Toth, Alfred, Statische und dynamische semiotische Morphismen. 2008 (= Kap. 21)

Walther, Elisabeth, Allgemeine Zeichenlehre. 2. Aufl. Stuttgart 1979